피부 위 부착 마커의 통계적 모형

A statistical model for marker position in biomechanics

김진욱

Jinuk Kim[1]

군산대학교 체육학과

[1] Department of Physical Education, Kunsan National University, Gunsan, South Korea

교신저자: 573-701 전라북도 군산시 미룡동 산 68 군산대학교 체육학과 조교수
E-mail: jinuk@kunsan.ac.kr.

Corresponding author

Jinuk Kim, Ph.D.

Assistant Professor

Department of Physical Education

Kunsan National University

San 68, Miryong-Dong, Gunsan, 573-701

Phone: 063.469.4645, Fax: 063.469.4641, Email: jinuk@kunsan.ac.kr

Acknowledgements

이 논문 또는 저서는 2014년 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (NRF-2014S1A5A8018532)

This work was supported by the National Research Foundation of Korea Grant funded by the Korean Government(NRF-2014S1A5A8018532).

요약

본 연구의 목적은 회전중심 추정과 관련된 선형모형의 역사와 연구들을 살펴보고 장단점을 파악하여 회전중심이 포함된 고정효과와 임의효과에 의한 마커관측벡터와의 관계를 나타내는 적절한 일반선형모형을 적용하는 것이다. 이를 위해 근골격계 질환경력이 없

는 남성 피험자 5명을 대상으로 고관절의 기능적 운동을 수행할 때 고속카메라로 촬영하여 얻어진 3차원 마커위치벡터에 모형을 적용시켜 관절중심을 추정하였다. 연구모형의 가정을 통해 추정된 모수의 불확실성과 모형의 적합성을 살펴본 결과, 일반선형모형은 자료를 적절하게 적합하지는 못하였다. 영상자료는 특성상 종단적자료에 해당되고, 인체 피부와 같은 연조직의 움직임이 생기며 이를 고려한 좀 더 세련된 모형이 필요하다.

주요용어: 마커, 고관절, 회전중심, 일반선형모형

Abstract

Objective: The purpose of this study is to apply a general linear model in statistics to the marker position vectors, which are used to study human joint rotational motion in biomechanics.
Method: For this purpose, the linear model representing the effect of the center of rotation of hip joint and the rotation of marker's position on the response was formulated. Five male subjects performed hip joint functional motions and the positions of nine marker attached on the thigh with respect to pelvic coordinate system were acquired at the same time. With the nine marker positions, the center of rotation of hip joint and marker positions on the thigh were estimated as parameters in the general linear model.
Result: After examining the fitted model, this model did not fit the data appropriately.
Conclusion: It is required for a refined model to take into account specific characters of longitudinal data and other covariates such as soft tissue artefacts.

Keywords: marker, hip joint, center of rotation, general linear model

Introduction

마커(marker)란 영상분석에서 인체 특정부위의 공간정보를 얻기 위해 사용되는 작은 구(sphere) 모양의 도구이다. 여러 개의 마커를 인체에 부착한 후 동작을 수행할 때 두 대 이상의 고속카메라로 이를 촬영하고 여기서 얻어진 일련의 영상프레임(frame)으로부터 마커의 3차원 위치를 계산하여 인체의 운동을 분석하는 방법은 운동역학에서 가장 많이 사용되고 있다.
물체를 질점(particle) 또는 강체(rigid body)로 가정하는 역학의 이상적인 원리는 인체운동에 그대로 적용되어 왔다. 여러 분절(segments)이 관절에 의해서 연결된 다물체계(multibody system) 모형도 인체에 적용되어 왔다. 이와 함께 영상에서 취득된 마커의 위치벡터로 관심 있는 변수를 수학적으로 모형화 하였다. 인체운동의 역학적 분석의 질은 적절한 물리적 모형과 수학적 모형의 선택과 조합에 달려있다.
관측된 마커의 움직임은 주로 근 수축(muscle contraction)에 의한 관절운동이 원인(cause)이 되어

나타나는 결과(effect)라 할 수 있다. 여기서 관절운동은 체계적 효과(systematic effects) 또는 고정효과(fixed effects)이다. 그리고 측정과정에서 발생하는 결코 피할 수 없는 오차(error)인 불확정성(uncertainty, Taylor, 1997)도 마커의 관측값에 영향을 주는 원인이 될 수 있는데 이를 임의효과(random effects)라 한다. 체계적 효과와 더불어 임의효과에 의해 나타난 결과의 평균과 분산 그리고 이에 대한 가정을 담고 있는 것이 통계적 모형(statistical models)이라 할 수 있다. 인체의 관절운동은 회전운동이고 변환행렬(transformation matrix)에 의해 각도, 각속도, 각가속도 등의 회전운동요소들이 기술된다. 회전운동은 회전축(axis of rotation) 또는 회전중심(center of rotation, CoR)을 중심으로 운동이 이루어진다. 회전축과 회전중심과 같은 관절중심(joint center)은 운동역학에서 모멘트암 계산, 좌표계 정의 등 다양하게 사용되며 관절의 기능을 진단하는 정형외과 임상에서도 주요한 관심이 된다(Kim, 2013b). 그러므로 관측된 마커의 모형은 관절중심(joint center)과 변환행렬과의 함수관계로 나타낸 것이 더 가치가 있다. 관절중심은 손으로 만지거나 직접 측정이 불가능하기 때문에 적절한 관절운동을 통해 추정해야만 한다.

운동역학에서 관절중심을 추정하는 일부 연구들은(Ehrig, Taylor, Duda, & Heller, 2006; Gamage & Lasenby, 2002; Piazza, Erdemir, Okita, & Cavanagh, 2004; Siston & Delp, 2006) 선형모형(linear model)에 속한다고 볼 수 있다. 그러나 체계적인 모형화의 절차가 이루어지지 않았다. 추정 모수(parameter)의 불확실성(uncertainty)과 모형의 적합성 판단 등에 대한 절차가 이루어지지 않았기 때문이다. 통계적 모형은 주요한 체계적 효과로서 자료를 간략하게 요약하고, 동시에 설명되지 않는 변이(variation)의 크기와 본질도 요약하는데 모형의 가치가 있다(McCullagh & Nelder, 1989). 그러므로 마커 위치의 적절한 모형을 수립하고 이에 기초하여 관심모수를 추정하고 모수의 불확실성과 모형의 타당성을 검토하는 것이 필요하다.

본 연구는 인체의 관절운동 중에 영상으로 관측된 분절 마커 위치의 통계적 모형을 다룬다. 본 연구의 목적은 회전중심 추정과 관련된 선형모형의 역사와 연구들을 살펴보고 장단점을 파악하여 회전중심이 포함된 고정효과와 임의효과에 의한 마커관측벡터와의 관계를 나타내는 적절한 일반선형모형(general linear model)을 적용하는 것이다. 연구모형의 가정을 통해 추정된 모수의 불확실성과 모형의 적합성 등을 알아보고 영상분석 자료에 대한 관절운동 모형의 적절성을 판단하고자 한다.

Method

1. A linear model for markers

근위분절(proximal segment)좌표계에서 관측된 원위분절(distal segment)에 부착되어 있는 마커의 운동학적 모형(kinematical model)은 오차 $\mathbf{e}$를 포함하여 다음과 같이 나타낼 수 있다(Figure 1).

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{o} + \mathbf{A}_j \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{e}_{ij} \qquad (1)$$

$\mathbf{r}_{ij} = \left[r_{x_{ij}} r_{y_{ij}} r_{z_{ij}}\right]^T$ 는 i 번째 마커($i = 1, \cdots, m$)의 j 번째 영상프레임($j = 1, \cdots, n$)에서 얻어진 3차원 위치벡터이다. $\mathbf{o}$(omicron)은 근위분절좌표계 성분으로 나타낸 관절의 회전중심 위치벡터이며, $\boldsymbol{\tau}_i$는

원위분절좌표계 성분으로 나타낸 i번째 마커의 위치벡터이다. $\mathbf{A}_j$는 원위분절에서 근위분절 성분으로 변환시켜주는 변환행렬(transformation matrix)이다. 근위(x_P,y_P,z_P)와 원위(x_D,y_D,z_D) 두 좌표계는 모두 직교좌표계(rectangular coordinate system)이며 분절에 고정되어 분절과 같이 운동한다. 근위분절에서 원위분절을 바라보면 $\mathbf{o}$을 중심으로 회전운동을 하는데 만일 인체분절을 강체라 가정한다면 $\mathbf{o}$과 $\boldsymbol{\tau}_i$는 각각의 좌표계에서 보았을 때 운동의 모든 구간에서 고정되어 있는 벡터이다. 운동역학에서 $\boldsymbol{\tau}_i$보다는 회전중심 $\mathbf{o}$가 더 관심 있으며 관절운동을 통하여 $\mathbf{o}$, $\boldsymbol{\tau}_i$를 추정해야 한다. 일반적으로 분절에 3개 이상의 마커를 부착하는데 분절의 3차원 운동정보를 얻기 위해서이다.

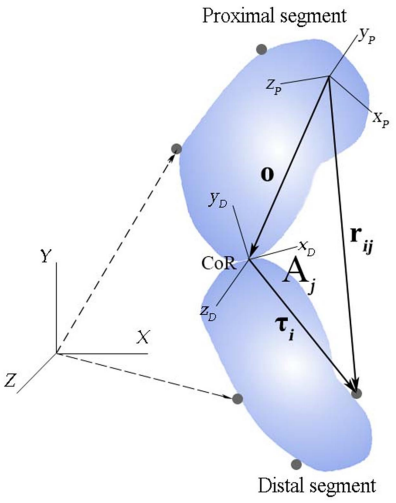

Figure 1. A marker position on the distal segment with respect to the proximal segment coordinate system

분절 간 마커의 통계적 모형은 Chan(1965)의 연구에서 뿌리를 찾을 수 있다. 측정된 n개의 좌표(X_j, Y_j) 자료가 2차원 평면상에서 원(circle) 모양을 이룰 때

$$X_j = \xi + \tau \cos\rho_j + \varepsilon_j \qquad (2)$$
$$Y_j = \eta + \tau \sin\rho_j + \delta_j$$

라 하였다($j = 1, \cdots, n$). 여기서 ξ, η는 원의 중심, τ는 원의 반지름, ρ_j는 좌표계 x축과 이루는 각도이다. ε_j, δ_j는 오차로 평균과 분산이 각각 0과 σ^2인 정규분포를 이루고 서로 독립이라 가정하였다. 여기서 관심을 가지는 모수는 중심(ξ, η)과 반지름 τ이다.

Equation 2의 모든 성분은 같은 좌표계 성분으로 표현되었음을 주목할 필요가 있다. 확률변수 X_j, Y_j의 측정값을 $\mathbf{r_j} = [x_j \quad y_j]^T$, 원의 중심을 $\mathbf{o} = [\xi \ \eta]^T$, 원의 중심으로부터 관측값까지 $\boldsymbol{\tau} = [\tau\cos\rho_j \ \ \tau\sin\rho_j]^T$ 벡터로 나타냈을 때 원을 적합 시키는 최소제곱법(least squares methods)은 다음과 같이 두 가지 기본 형태가 있다.

$$f_G = \sum_{j=1}^{n} \left(\|\mathbf{r}_j - \mathbf{o}\| - \boldsymbol{\tau}\right)^2 \qquad (3)$$
$$f_A = \sum_{j=1}^{n} \left(\|\mathbf{r}_j - \mathbf{o}\|^2 - \boldsymbol{\tau}^2\right)^2 \qquad (4)$$

여기서 $\|\cdot\|$ 는 벡터의 길이(norm)이다. 첫 번째 식은 Robinson(1961)에 의해, 두 번째 식은 Delogne(1972)와 Kåsa(1976)에 의해서 제안되었다. 첫 번째 식은 자료와 원의 법선거리(normal distance)가 최소가 되도록 하며 이 거리는 기하적 거리이므로 기하적합법(geometric fit)이라 한다(Gander, Golub, & Strebel, 1994). 이외의 방법은 대수적합법(algebraic fit)이라 하는데 대개 파라미터를 이용하여 표현한 대수식의 제곱을 최소가 되도록 하며(Kim, 2011) 두 번째 식이 여기에 해당된다. 기하적합 함수의 최소제곱 추정값(least squares estimate)은 최대가능도추정값(maximum likelihood estimate)과 같으며(Chan, 1965) 비선형식으로 반복적인 계산에 의해서 해를 구해야 한다. 반면 대수적합은 선형식으로 바로 해를 구할 수 있다(closed-form). Equation 2, 3, 4의 2차원 모형은 3차원의 구면모형(spherical model) 확장될 수 있다.

Equation 1의 $\boldsymbol{\tau}_i$는 두 가지 점에 주목해야 한다. 첫째, Equation 3, 4에 나타난 τ는 스칼라(scalar)인 반면 $\boldsymbol{\tau}_j$는 벡터(vector)라는 점과 둘째, $\mathbf{o}$, $\mathbf{e}_{ij}$, $\mathbf{r}_{ij}$와 달리 $\boldsymbol{\tau}_i$는 원위좌표계 성분으로 표현된 점이다. 강체로 가정하는 인체의 역학적 해석에서 $\boldsymbol{\tau}_i$의 중요성은 $\mathbf{o}$보다 떨어질 수는 있다. 그러나 인체를 강체가 아닌 변형체(deformable body)로 가정한다면 $\boldsymbol{\tau}_i$ 의 중요성이 부각될 수 있으며 지역좌표계(local coordinate system)인 원위분절좌표계(Figure 1) 성분으로 나타내야만 한다. 더욱 중요한 것은 강체역학에서도 $\boldsymbol{\tau}_i$를 지역좌표계 성분으로 표현하는 것이 분석에 유리하다. 그리고 3차원 인체의 운동 분석을 위해서 $\boldsymbol{\tau}_i$는 벡터로서 추정되어야 가치가 있다.

Equation 1에서 $\mathbf{r}_{ij}$가 주어졌을 때 벡터 $\mathbf{o}$, $\boldsymbol{\tau}_i$를 추정하는 것은 불가능하다(unidentifiable). 이를 해결하는 방법은 $\boldsymbol{\tau}_i$를 길이인 스칼라로 변환시키는 것이다.

$$\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{o} = \mathbf{A}_j\,\boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{e}_{ij} \qquad (5)$$
$$\|\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{o}\| \le \|\mathbf{A}_j\,\boldsymbol{\tau}_i\| + \|\mathbf{e}_{ij}\|$$
$$\|\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{o}\| \le \tau_i + e_{ij}$$

위의 식은 삼각부등식(triangular inequality)에 의한 것이며, $\mathbf{A}$ 가 직교행렬(orthogonal matrix)이기($\mathbf{A}_j^T\mathbf{A}_j = \mathbf{I}$) 때문에 $\|\mathbf{A}_j\,\boldsymbol{\tau}_i\| = \tau_i$가 된다. 오차 e_{ij}가 아주 작다고 가정할 경우에 위의 식은 근사적으로

$$\|\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{o}\| \approx \tau_i + e_{ij} \qquad (6)$$

이며 오차벡터의 변위(displacement)가 아닌 거리(distance)의 제곱을 최소화한 것이 Equation 3, 4에 해당된다. 여기서 τ_i는 좌표계와 무관하다($\|\mathbf{A}_j\,\boldsymbol{\tau}_i\| = \|\boldsymbol{\tau}_i\| = \tau_i$). Equation 3, 4로는 벡터 $\boldsymbol{\tau}_i$를 추정할 수 없다. Equation 1을 측정모형(measurement model)의 공분산구조분석의 방법으로 접근하여도 추정불가능이다. 적절한 구속조건(constraints)이 없기 때문에 무수히 많은 해가 존재하는데 선형변환(linear transformation)에 해당되기 때문이다. 이 외에 Späth(1998)의 3차원 직교좌표계 성분이 아닌 구면좌표계 성분으로 나타낸 모형도 있다. 그러나 이 모형도 완전한 세 개의 자유도를 가지는 회전운동을 기술할 수 없다.

근위분절좌표계로 나타낸 벡터 $\boldsymbol{\tau}_i$ 를 추정하려면 변환법(transformation method)으로 불리는 방법(Ehrig et al., 2006; Piazza et al., 2004; Siston & Delp, 2006)을 이용하는 것이다. Equation 1에

분절의 좌표계가 변환행렬 $\mathbf{A}_j$로서 주어지는 것이다. Equation 1에서 $\mathbf{r}_{ij}$와 $\mathbf{A}_j$가 주어졌을 때 이를 일반선형모형(Monahan, 2008; Ravishanker & Dey, 2002)으로 생각할 수 있으며 $\mathbf{o}$과 $\boldsymbol{\tau}_i$ 모두 추정가능하게 된다. 변환행렬은 분절의 좌표계 외에 오일러각(Eulerian angles), 방향코사인(directional cosines), 사원수(quartenions) 등(Ginsberg, 1998; Goldstein, 1980)으로 구성될 수도 있다. 변환법 추정량은 적합법에 비해 분산이 작은 불편추정량이므로(Kim, 2013a) 변환법이 권장된다.

$\mathbf{r}_{ij}$와 $\mathbf{A}_j$가 주어진 Equation 1에서 m개의 마커에 해당되는 n개의 모든 관측벡터($N = mn$)를 일반선형모형에서 관례적으로 사용되는 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \qquad (7)$$

$\mathbf{y}$는 반응변수(response variable)로

$$\mathbf{y} = \left\{ c\left\{ {}_c\mathbf{r}_{ij} \right\}_{j=1}^{n} \right\}_{i=1}^{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11} \\ \mathbf{r}_{12} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{ij} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{mn} \end{bmatrix} \qquad (8)$$

이다. 여기서 c는 열(column)로 배열하는 것을 의미하며(McCulloch, Searle, & Neuhaus, 2008) n개의 벡터로 구성된 m개의 마커를 순서대로 배열하여 하나의 열($3N \times 1$)을 가지도록 하였다. 마찬가지로 행렬 $\mathbf{A}_j$와 벡터 $\mathbf{e}_{ij}$를 각각

$$\mathbf{A} = \left\{ {}_c\mathbf{A}_{ij} \right\}_{j=1}^{n} \qquad (9)$$

$$\mathbf{e} = \left\{ c\left\{ {}_c\mathbf{e}_{ij} \right\}_{j=1}^{n} \right\}_{i=1}^{m} \qquad (10)$$

로 나타냈을 때 $\mathbf{X}$는 $3N \times 3(m+1)$크기를 가지는 모형행렬(model matrix)로 크로넥커 적(Kronecker product) $\otimes$를 이용하면

$$\mathbf{X} = [\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{I}_3 \ , \ \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{A}] \qquad (11)$$

이다. 여기서 $\mathbf{1}_N$은 N개의 성분이 모두 '1'인 $\mathbf{1}_N = (1, \cdots, 1)^T$벡터이며, $\mathbf{I}_3$과 $\mathbf{I}_m$은 크기가 각각 3과 m인 단위행렬(identity matrix)이다. $\mathbf{X}$는 설명변수(explanatory variable)라 할 수 있다. 벡터 $\boldsymbol{\beta}$는 $\mathbf{y}$의 평균과 관련된 모수벡터로

$$\boldsymbol{\beta} = [\mathbf{o}^T \boldsymbol{\tau}_1^T \cdots \boldsymbol{\tau}_m^T]^T \qquad (12)$$

이다. Equation 7은 관절중심 $\mathbf{o}$, m개의 마커의 회전운동에 의한 효과 $\boldsymbol{\tau}_1, \cdots, \boldsymbol{\tau}_m$를 가지는 일반선형모형으로 $\mathbf{y}$의 기대값(expected value)과 분산(variance)은 각각 $E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, $Var(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\Sigma}$이다.

따라서 오차 $\mathbf{e}$의 기대값과 분산은 $E(\mathbf{e}) = 0$, $Var(\mathbf{e}) = \mathbf{\Sigma}$가 된다. $\mathbf{\Sigma}$는 $3(N \times N)$의 크기를 가지는 공분산행렬로 추정해야할 모수의 수가 $3N(N+1)/2$로 매우 크다. 그러므로 일반선형모형에서는 $\mathbf{e}$에 대한 아주 일반적인 가정을 한다. 즉, 모든 N 개의 오차벡터 간은 서로 관련이 없는 독립성(independence) 가정과 모든 오차벡터는 동일한 분산 σ^2 을 가진다는 등분산성(homoscedasticity) 가정이다.

$$\mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{I}_{3N} \qquad (13)$$

변환법은 모두 등분산 가정하에 $\boldsymbol{\beta}$가 추정된다. Equation 13은 오차벡터 x, y, z 성분 간도 서로 독립이며, x, y, z성분 모두 동일한 분산σ^2을 가진다는 가정이 포함된 것이다. 본 연구에서는 이러한 가정을 수정하였다. 직교(orthogonal)하는 벡터의 x, y, z성분은 서로 독립이지만 분산은 크기가 서로 다른 이분산성(heteroscedasticity) 가정이다. 이 때 오차분산은

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{V} \qquad (14)$$

이며 $\mathbf{V}$는

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

이다. 독립을 가정하였으므로 $\mathbf{\Sigma}$는 3개의 모수로 이루어진 대각행렬이다. $\mathbf{\Sigma}$를 알고 있다면 $\boldsymbol{\beta}$의 일반화 최소제곱추정량(generalized least squares estimator)을 이용하면 되지만 알 수도 없고 실제 추정하기에는 반복계산과정을 거쳐야 한다. 일반최소제곱추정량(ordinary least squares estimator)

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \qquad (16)$$

는 이분산성을 가지는 상황에서도 여전히 불편추정량(unbiased estimator)이다($E(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}$). 그러나 분산 $Var(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$는

$$Var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{\Sigma}\,\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} \qquad (17)$$

에 대해 편의되어 있고 효율성(efficient)을 만족하지 않으며 공분산행렬의 일치성(consistent)을 만족하지 않기 때문에 추론에 있어 적절하지 않다(Diggle, Heagerty, Liang, Zeger, 2002). 따라서 본 연구는 두 가지 방법을 이용하여 추정량 $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$의 분산을 구하였다. 첫 번째는 Equation 15와 같이 x, y, z 성분별로 따로 σ_x^2, σ_y^2, σ_z^2 을 추정하는 것이고, 두 번째는 MacKinnon & White(1985)의 이분산성의 일치추정량(heteroscedasticity-consistent covariance matrix estimator)을 이용하는 것이다. 일반최소제곱추정량 $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$을 이용하여 잔차(residual)를 구한다음 $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$의 분산에 이를 고려하여 주는 방법이다. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$를 Equation 7의 $\boldsymbol{\beta}$에 대입하여 얻은 추정벡터 $\hat{\mathbf{y}}$는

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \qquad (18)$$
$$= \mathbf{H}\mathbf{y}$$

이다. 여기서 $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T$는 추정공간(estimation space)로 변환시켜주는 사영행렬(projection matrix)이다. $\mathbf{y}$와 $\hat{\mathbf{y}}$의 차이인 잔차 $\hat{\mathbf{e}}$를

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \qquad (19)$$
$$= (\mathbf{I}_{3N} - \mathbf{H})\mathbf{y}$$

라 할 때 Equation 15의 성분별 σ_x^2, σ_y^2, σ_z^2 최소제곱추정량 $\hat{\sigma}_x^2, \hat{\sigma}_y^2, \hat{\sigma}_z^2$을 Equation 14, 15에 대입하여 얻은 공분산행렬 $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$을 이용한 $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$의 분산은

$$Var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\,\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} \quad (20)$$

이다. MacKinnon & White(1985)의 HC3(heteroscedasticity-consistency)를 이용한 $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$의 분산은 다음과 같다.

$$Var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\,\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} \quad (21)$$

여기서 $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}$는

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \mathrm{diag}\left[\frac{e_k^2}{(1-h_{kk})^2}\right],\ k = 1, \cdots, 3N \quad (22)$$

이다. e_k는 잔차 $\hat{\mathbf{e}}$의 성분이며($k = 1, \cdots, 3N$) $1 - h_{kk}$는 $\mathbf{I}_{3N} - \mathbf{H}$의 대각성분이다. HC3는 추정벡터의 표준오차를 구하기 위한 로버스트(robust)한 방법으로 여러 상황에서 좋은 결과를 보였다(Long & Ervin, 2000). 잔차의 분산은

$$Var(\hat{\mathbf{e}}) = \mathbf{V}_{res} = \mathbf{Var}\{(\mathbf{I}_{3N} - \mathbf{H})\mathbf{y}\} \qquad (23)$$
$$= (\mathbf{I}_{3N} - \mathbf{H})\boldsymbol{\Sigma}\,(\mathbf{I}_{3N} - \mathbf{H})$$

이다. 추정된 공분산행렬 $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$, 잔차 $\hat{\mathbf{e}}$, 그리고 추정된 잔차분산 $\widehat{\mathbf{V}}_{res} = (\mathbf{I}_{3N} - \mathbf{H})\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\,(\mathbf{I}_{3N} - \mathbf{H})^T$을 이용하여 다양한 종류의 잔차(Draper & Smith, 1998)를 구하여 모형 진단을 수행한다.

2. Empirical data analysis

인체 관절운동 중에 측정된 마커 위치벡터에 일반선형모형을 적용하기 위해서 우측 고관절(hip joint)을 선택하였다. 고관절은 세 개의 회전자유도를 가지는 관절이다. 굴곡/신전(flexion/extension), 내/외전(adduction/abduction), 내/외측회전(internal/external rotation)이 여기에 해당되며 고관절

운동을 통해 관절중심을 추정하였다. 실험을 위해 다섯 명의 남성 피험자를 선택하였으며 신체적 특성은 신장 179 ± 2 cm, 질량 73 ± 3 kg, 나이 $20.6 \pm .89$ 살이다. 이들은 모두 근골격계 질환 병력이 없으며 실험참여에 자발적 동의를 하였고 K대학교 연구윤리위원회 승인을 얻어 실험을 진행하였다. 피험자 골반(pelvis)과 대퇴골(femur)의 해부학적 랜드마크(anatomical landmark)에 해당되는 지점의 피부위에 7개의 마커를 부착하였다. 골반은 전방 좌우 두 개의 ASIS(anterior superior iliac spine), 후방 좌우 두 개의 PSIS(posterior superior iliac spine), 대퇴골은 GT(greater trochanter), LE(lateral epicondyle), ME(medial epicondyle)이다. 그리고 대퇴의 내측, 전방, 외측에 각각 3개씩 9개의 마커를 추가적으로 부착하였다. 실험에 사용된 마커의 개수는 총 16개로 랜드마크에 부착된 마커(7개)는 각 분절의 좌표계 정의에 사용되었고 나머지 마커(9개)는 본 연구모형의 분석에 사용되었다(Figure 2).

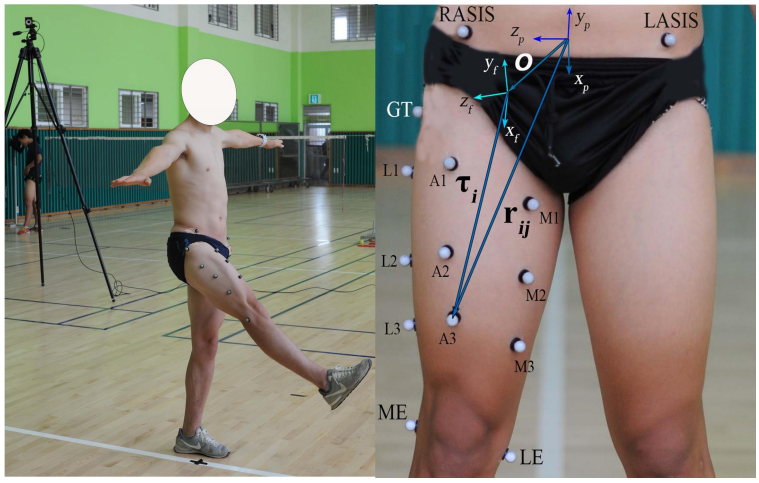

Figure 2. Movements of a hip joint for estimating the CoR and marker positions

피험자는 선행연구(De Rosario, Page, Besa, & Valera, 2013; Ojeda, Martínez-Reina, & Mayo, 2014)에서 사용된 세 가지 동작을 수행하였다. 동작의 시작은 중립상태이며 첫 번째 동작은 굴곡 30°-중립-신전 30°-중립, 두 번째 동작은 외전 30°-중립, 세 번째 동작은 굴곡 30°-신전 30°지점으로 회선(circumduction)-중립이다. 마커의 3차원 위치벡터는 미국 Nationalpoint사의 Optitrack Motion Capture System을 이용하여 cm 단위로 취득하였다. 사용된 카메라는 Prime13으로 7대를 이용하였으며 1 초당 120 프레임으로 촬영하였다. 3차원 위치벡터 원자료(raw data)는 아무런 필터링(filtering)을 거치지 않았다. Wu et al.(2002)의 방법을 이용하여 골반과 대퇴골의 좌표계를 정의 하였으며 대퇴골의 경우 고관절 중심을 사용하는 대신 GT를 이용하였다. 골반좌표계와 대퇴좌표계는 <그림 1>의 근위분절좌표계와 원위분절좌표계에 해당된다. 좌표계의 $+x$축은 전방, $+y$축은 상방, 그리고 $+z$축은 우측이다. 분석에 사용되는 9개의 마커는($m = 9$) 골반좌표계 성분으로 변환하였으며 Equation 1의 $\mathbf{r}_{ij}$과 같다. 자료 처리와 모형에 의한 추론과정은 MATLAB ver 6.1(The Math Works)을 이용하였다.

Results

추정된 $\hat{\mathbf{o}}$ 는 LASIS(left ASIS)와 RASIS(right ASIS)의 중간지점을 원점(origin)으로 하는

골반좌표계에서의 고관절중심위치벡터이며, $\hat{\boldsymbol{\tau}}_i$ 는 고관절중심에 위치한 대퇴골좌표계에서의 마커위치벡터이다(Figure 2). 특히 $\boldsymbol{\tau}_i$는 랜드마크에 부착한 것이 아니라 대퇴를 대략 3등분 하는 지점 내/외측, 전방에 부착한 마커위치이므로 피험자들마다 추정위치가 서로 다르다. 따라서 결과에는 나타내지 않았다. 추정된 모수 $\hat{\mathbf{o}}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2$는 <Table 1>과 같다.

고관절중심 추정벡터 $\hat{\mathbf{o}}$은 피험자들마다 골격의 크기가 서로 다르기 때문에 약간의 차이가 있다. x,y,z축의 범위가 각각 –2.423~2.264, -15.464~-12.187, 11.066~12.153으로 x축 변이가 가장 크다. 일반최소제곱 분산추정값 $\hat{\sigma}_o^2$은 .983~3.063로 피험자들간 차이를 보이고 있다. 성분별 분산추정값 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{xyz}^2$ 은 대부분 x 축 성분의 크기가 크게 나타나는 것을 알 수 있다. 피험자 1, 5는 크기가 $x>z>y$순으로 나타났고, 피험자 2, 3, 4는 크기가 $x>y>z$순으로 나타났다. $\hat{\mathbf{o}}$의 표준오차는 세 가지 방법(SE_o,SE_{xyz},SE_{HC3})이 거의 유사한 결과를 보였다.

Table 1. Estimates of parameters. (unit: cm)

Subjects		$\hat{\mathbf{o}}$				$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2$	
						$\hat{\sigma}_o^2$	$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{xyz}^2$
		Estimates	SE_o	SE_{xyz}	SE_{HC3}	Estimates	
S1	x	2.264	0.035	0.035	0.040		3.488
	y	-15.234	0.039	0.039	0.041	3.063	2.713
	z	11.066	0.056	0.055	0.055		2.937
S2	x	1.1405	0.027	0.027	0.025		1.393
	y	-12.187	0.030	0.030	0.030	.983	.931
	z	12.153	0.037	0.037	0.040		.625
S3	x	0.007	0.041	0.042	0.043		1.506
	y	-12.738	0.037	0.037	0.040	1.357	1.408
	z	11.244	0.046	0.046	0.058		1.158
S4	x	0.455	0.028	0.028	0.033		1.780
	y	-15.464	0.033	0.034	0.039	1.185	1.017
	z	11.339	0.049	0.048	0.049		.757
S5	x	-2.423	0.033	0.033	0.039		3.018
	y	-15.345	0.034	0.034	0.037	2.501	1.920
	z	11.293	0.045	0.044	0.045		2.565

Note. SE_o = standard error from ordinary least squares, SE_{xyz} = from different components of estimates of error variance, SE_{HC3} = from HC3.

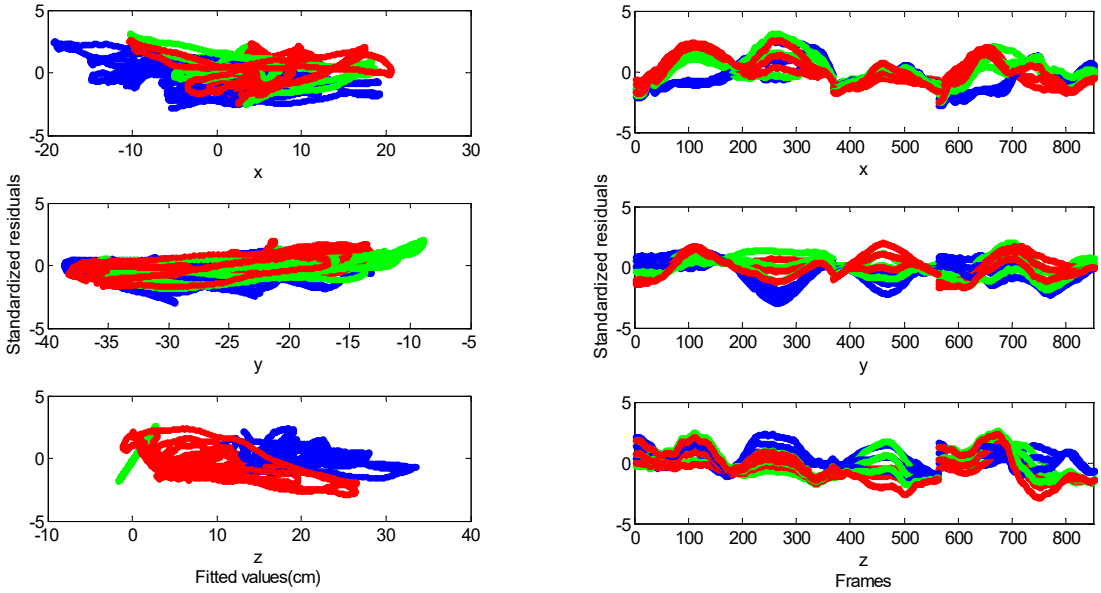

Figure 3. Plots of standardized residuals with fitted values and frames

모형의 적합성을 판단하기 위한 잔차는 다섯 명의 피험자가 대체로 유사한 패턴을 보였고 분석에는 피험자 5의 잔차를 이용하였다. <Figure 3>은 x, y, z성분별 잔차를 나타내는 그래프로 왼쪽은 적합된 값에 대한 잔차를, 오른쪽은 연속적인 동작에 따른 잔차를 나타낸 것이다. 오른쪽 그림 360, 550 프레임 부근에서 불연속적인 형태가 나타난 것은 세 개의 수행된 동작을 모두 분석에 사용했기 때문이며 동작이 구분되는 지점이다.

두 그림을 보면 잔차가 흩어져 있지 않고 연속적인 형태를 보이고 있는데 오른쪽 그림을 보면 그 양상이 확연히 드러난다. 이는 확실하게 측정값들 간에 자기상관(autocorrelation)을 가지는 자료구조라 할 수 있다. 등분산에 대한 부분을 살펴보면 오른쪽 그래프에서 볼 수 있듯이 x, y, z성분은 거의 등분산으로 판단이 되지만 운동수행에 따라 잔차의 크기가 다른 것을 볼 수 있다. 동작의 종류에 따라, 그리고 마커의 위치에 따라 크기가 달라짐을 짐작해 볼 수 있다.

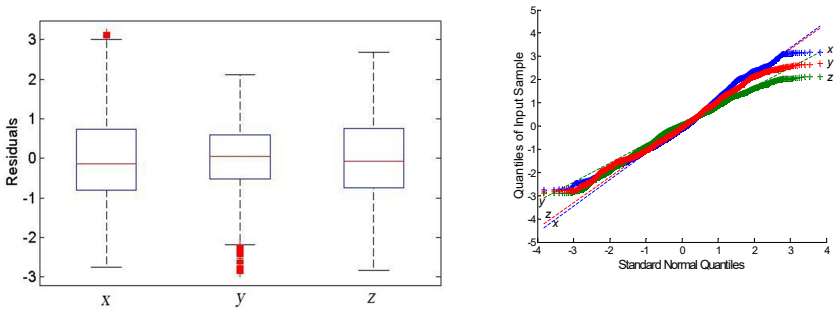

Figure 4. Box and whisker plots and normal plots of residuals of each x,y,z components

<Figure 4>는 잔차의 상자와 수염그림(box and whisker plot)과 Q-Q그림이다. 왼쪽을 보면 x가

변이가 가장 크게 나타났으며 $+x$쪽과 $-y$쪽에 이상치가 있는 것으로 나타났다. 정규성 검정을 하기 위한 오른쪽 그림을 보면 x, y, z모두 0을 중심으로 대칭의 분포를 보이고 정규분포보다 꼬리가 약간 긴 형태를 보이고 있다. 꼬리의 길이는 그 크기가 크지 않다고 판단되고 양쪽으로 균형을 이루어 분포하기 때문에 추정값에 대한 영향은 무시해도 되지 않을까 생각된다. 잔차의 분산을 더 살펴보기 위해서 <Figure 5>에 관측값과 추정값을 x, y, z 성분으로 나누어 그래프를 그렸다. x축은 전후축으로 고관절의 굴곡/신전운동에서 가장 큰 변위(displacement)를 보이는 축으로 그래프를 보면 방향전환 구간(기울기 '0')에서 관측벡터와 추정벡터의 차이가 큰 것을 볼 수 있는데 분산추정값을 크게 나타내는 가장 원인인 것으로 생각된다.

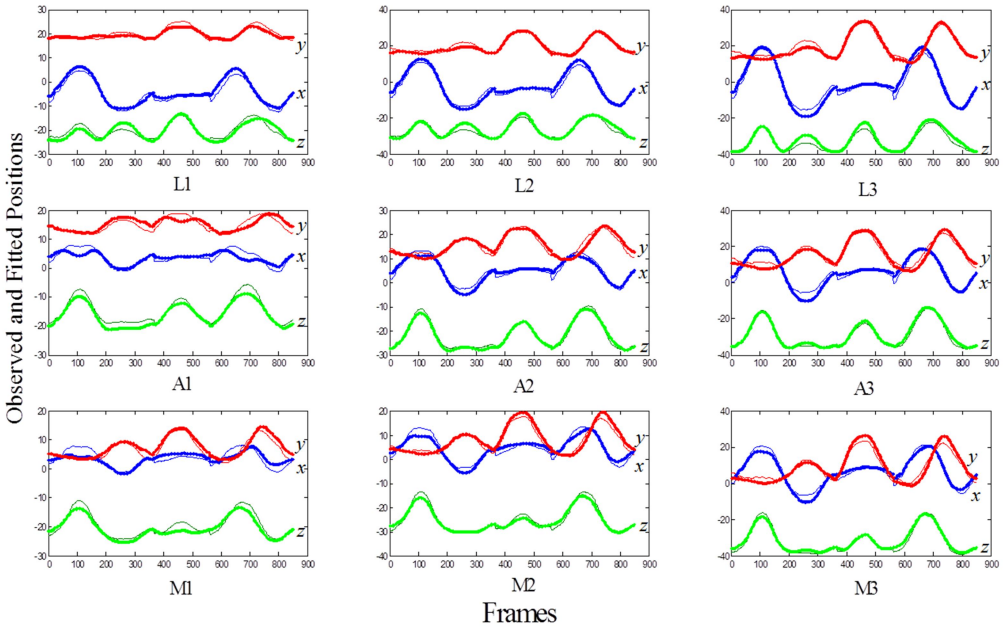

Figure 5. Observed and fitted positions for 9 markers of each x, y, zcomponents. Thin lines(—) are observed positions and thick lines(—) are fitted positions. L, A, M are for lateral, anterior, and medial respectively(Figure 2).

Discussion

오차가 포함된 측정값으로 관심 있는 모수의 추론 문제를 다루기 위해서는 통계라는 도구가 필요하다. 주어진 문제를 통계적으로 다룬다는 것은 어려운 일이며 피할 수 없는 오류가 발생하기도 하지만 일단 통계용어로 표현되었다면 솔루션은 정해져 있다(Faraway, 2005). 인체 대부분의 움직임을 담당하는 활막성관절(synovial joint)은 회전운동만 존재하는 구조라 주로 가정을 한다. 회전운동은 회전행렬에 의해서 기술될 수 있으며 회전운동이 발생하는 회전축 또는 순간회전축들이 지나는 회전중심은 운동역학에서 중요한 의미를 가진다. 그리고 일반적으로 인체 분절은 강체라 가정하기 때문에 여기에 부착된 마커들 간의 상대거리는 운동 중에도 변하지 않는 상수라 여긴다. 이러한 인체의 특성과 오차를 포함한 측정값을 통계적 도구와 결합하여 관절의 운동에서 관측된

마커 위치의 평균과 회전중심과의 관계를 선형모형으로 표현하여 분석을 수행하였다는데 본 연구의 의의가 있다.

본 연구의 모형은 두 가지 점에서 일반선형모형과 약간의 차이가 있다. 첫 번째, 모든 마커의 설명변수인 $\mathbf{A}_j$가 동일하다(Equation 7, 11). 강체의 가정에 의해서 원위분절에 부착된 마커위치는 고정이며 회전운동은 강체의 고유한 특성으로 모든 마커가 동일한 회전운동을 하기 때문에 동일한 변환행렬이 적용된다. 두 번째, 사용되는 마커의 개수에 따라 추정해야할 모수도 늘어난다(Equation 12). 하나의 마커로도 $\mathbf{o}$, $\boldsymbol{\tau}$ 추정은 가능하다. 그러나 일반적으로 실험에서 분절의 병진운동(translation motion)과 회전운동(rotational motion) 정보를 얻기 위해 3개 이상의 마커를 이용한다. 이때 추가된 마커 $\boldsymbol{\tau}_i$도 추가적으로 추정해야할 모수이며 부착위치에 따라 $\boldsymbol{\beta}_i$의 값도 달라지는 구조를 가진다. 무작정 많은 수의 마커를 사용하면 추정이라 수치해석적에 있어서도 비효율적인 된다.

운동역학에는 일반최소제곱(ordinary least squares)을 많이 사용한다(Kim, 2010). 측정벡터 간 관련성이 없는 경우와 분산이 동일한 것을 가정했을 때 일반최소제곱추정량은 가우스-마르코프 정리(Gauss-Markov theorem)에 의하면 분산이 가장 작으면서 편의 되지 않은 추정량(BLUE)이기 때문이다. 본 연구에서 벡터성분 x, y, z를 포함하여 m개의 마커 간과 n개의 연속적 마커 내 측정벡터가 서로 독립이라고 가정하였다. 그리고 직교좌표계 성분 x, y, z는 서로 다른 분산을 가지는 것으로 가정하였다. 수행하는 운동의 종류에 따라 x, y, z 성분의 변이가 다를 것이라는 생각 때문이었으며 그 결과 분산의 크기는 차이가 있다고 여겨진다. 그러나 관절중심 추정벡터의 표준오차에는 영향을 미치지 않았다. 이는 <Figure 3>을 보면 프레임 수가 약 900 정도 되는데 표본이라고 할 수 있는 프레임 수가 크기 때문인 것으로 생각된다. 본 연구에서는 초당 120프레임의 샘플링 레이트(sampling rate)로 영상자료를 얻었다. 이를 증가시키면 자료의 수가 증가하여 연산시간도 늘어나게 된다. 따라서 적절한 샘플링 레이트를 결정하는 것도 연구의 타당성에 영향을 미칠 것으로 생각된다.

잔차 그림에서 보았듯이 자료는 연속적이고 운동 수행에 따라 변화하는 형태를 보였다. 이는 영상자료의 시간에 따른 연속적인 측정값은 서로 독립이 아니고 관련성을 가지는 종단적인 자료(longitudinal data)이기 때문이다. 이러한 자료의 특성을 고려하여 추정을 수행하는 것이 필요할 것으로 생각된다.

Conclusion

본 연구는 관절의 운동 중 회전중심 추정에 있어 일반선형모형을 적용시켜 추정벡터의 불확실성과 모형의 타당성을 알아본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

일반적으로 사용하는 오차의 등분산, 독립성 모형과 이분산을 가정한 모형간에는 추정벡터의 표준오차가 크게 차이가 나타나지 않았다. 잔차는 동작에 따라 변화하는 양상을 보였으며 특히 방향의 전환이 있을 때 크게 나타났다. 따라서 현재의 모형은 제한적이라 생각되며 분산공분산행렬에 특정구조를 가지도록 해야 한다. 이를 위해서는 마커를 임의효과로 가정하는 혼합모형(mixed-effects model)이나, 동작이 일어나는 동안에 발생하는 피부와 같은 연조직의 움직임인 STA(soft tissue artefacts)의 영향을 설명하는 모형 등의 수정을 고려해야 한다.

References

Chan, N. N. (1965). On circular functional relationships. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 27,* 45-56.

De Rosario, H., Page, A., Besa, A., & Valera, Á. (2013). Propagation of soft tissue artifacts to the center of rotation: A model for the correction of functional calibration techniques. *Journal of Biomechanics, 46,* 2619-2625.

Delogne, P. (1972). Computer optimization of Deschamp' method and error cancellation reflectometry. *Proceedings of the IMEKO-Symposium on Microwave Measurement, Bupapest*, 117-129.

Diggle, P. J., Heagerty, P., Liang, K. Y., & Zeger, S. L. (2002). *Analysis of longitudinal data* (2nd ed.). New York, NY: Oxford University Press.

Draper, N. R., & Smith, H. (1998). *Applied regression analysis* (3rd ed.). New York, NY: John Wiley & Sons, Inc.

Ehrig, R. M., Taylor, W. R., Duda, G. N., & Heller, M. O. (2006). A survey of formal methods for determining the center of rotation of ball joints. *Journal of Biomechanics, 39*, 2798-2809.

Faraway, J. J. (2005). *Linear models with R*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.

Gamage, S. S. H. U., & Lasenby, J. (2002). New least squares solutions for estimating the average center of rotation and the axis of rotation. *Journal of Biomechanics, 35,* 87-93.

Gander, W., Golub, G. H., & Strebel, R. (1994). Least-squares fitting of circles and ellipses. *BIT, 34*, 558-578.

Ginsberg, J. H. (1998). *Advanced engineering dynamics* (2nd ed.). New York, NY: Cambridge University Press.

Goldstein, H. (1980). *Classical mechanics* (2nd ed.). Addison-Wesley.

Kåsa, I. (1976). A circle fitting procedure and its error analysis. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 25*, 8-14.

Kim, J. (2010). The validity test of upper•forearm coordinate system and the exploratory analysis of the interactive effect between flexion/extension and pronation/supination during elbow joint motion. *Korean Journal of Sport Biomechanics, 20*, 117-127.

Kim, J. (2011). Comparison among functional methods of axis of rotation suitable for describing human joint motion, *Korean Journal of Sport Biomechanics, 21*, 449-458

Kim, J. (2013a). Error analysis on fitting and transformation methods for estimating the center of rotation in a spherical joint. *The Korean Journal of Physical Education, 52,* 523-536.

Kim, J. (2013b). The comparison of sphere fitting methods for estimating the center of rotation on a human joint. *Korean Journal of Sport Biomechanics, 23*, 053-062

Long, J. S., & Ervin, L. H. (2000). Statistical computing and graphics: Using heteroscedasticity consistent standard errors in the linear regression model. *The American Statistician, 54*, 217-224.

MacKinnon, J. G., & White, H. (1985). Some heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimators with improved finite sample properties. *Journal of Econometrics, 29,* 305-325.

McCullagh, P., & Nelder, J. A. (1989). *Generalized linear models* (2nd ed.). Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.

McCulloch, C. E., Searle, S. R., & Neuhaus, J. M. (2008). *Generalized, linear, and mixed models* (2nd ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

Monahan, J. F. (2008). *A primer on linear models*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.

Ojeda, J., Martínez-Reina, J., & Mayo, J. (2014). A method to evaluate human skeletal models using marker residuals and global optimization. *Machanism and Machine Theory, 73,* 259-272.

Piazza, S. J., Erdemir, A., Okita, N., & Cavanagh, P. R. (2004). Assessment of the functional method of hip joint center location subject to reduced range of hip motion. *Journal of Biomechanics, 37*, 349-356.

Ravishanker, N., & Dey, D. K. (2002). *A first course in linear model theory.* Chapman & Hall/CRC.

Robinson, S. M. (1961). Fitting spheres by the method of least squares. *Communications of the ACM, 4,* 491.

Siston, R. A., & Delp, S. L. (2006). Evaluation of a new algorithm to determine the hip joint center. *Journal of Biomechanics, 39*, 125-130.

Späth, H. (1998). Least-square fitting spheres. *Journal of Optimization Theory and Applications, 96*, 191-199.

Taylor, J. R. (1997). *An introduction to error analysis: The study of uncertainties in physical measurements* (2nd ed.). University Science Books.

Wu, G., Siegler, S., Allard, P., Kirtley, C., Leardini, A., Rosenbaum, D., . . . Stokes, I. (2002). ISB recommendation on definitions of joint coordinate system of various joints for the reporting of human joint motion-part Ⅰ: ankle, hip, and spine, *Journal of Biomechanics, 35,* 543-548.